Séance d'exercices 8°
Formalisations

11 et 18 mai 2004

En groupes de deux, *formalisez* la preuve « mathématique » du « Théorème de Pythagore »[1] suivante :

> Montrons que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
>
> – Considérons le développement suivant
>
> $$\begin{aligned} \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot (\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u}+\vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$
>
> – L'égalité $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ est donc respectée à la seule condition que $2\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ orthogonaux.

Dans ce but :

1. formaliser le *théorème* à démontrer avec sa liste d'hypothèses et sa proposition
2. identifiez les constituants caractéristiques du *langage formel* à employer
3. posez les *axiomes* (définitionnels ou pas) dont vous avez besoin
4. donnez la *preuve formelle* sous forme d'une démonstration naturelle abrégée en notation emboîtée

Ensuite :

1. donnez un nom à la *théorie logique* dans laquelle vous avez travaillé
2. identifiez la théorie logique de laquelle la vôtre est une *extension*
3. dites si votre théorie est une extension *propre* ou *définitionnelle*

[1] preuve « mathématique » tirée du cours Algèbre linéaire, EPFL, 2003 et fournie par Philippe Suter