

## Séance d'exercices 8° Formalisations

11 et 18 mai 2004

En groupes de deux, *formalisez* la preuve « mathématique » du « Théorème de Pythagore »<sup>1</sup> suivante :

Montrons que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ .

– Considérons le développement suivant

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

– L'égalité  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$  est donc respectée à la seule condition que  $2\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$  orthogonaux.

Dans ce but :

1. formaliser le *théorème* à démontrer avec sa liste d'hypothèses et sa proposition
2. identifiez les constituants caractéristiques du *langage formel* à employer
3. posez les *axiomes* (définitionnels ou pas) dont vous avez besoin
4. donnez la *preuve formelle* sous forme d'une démonstration naturelle abrégée en notation emboîtée

Ensuite :

1. donnez un nom à la *théorie logique* dans laquelle vous avez travaillé
2. identifiez la théorie logique de laquelle la vôtre est une *extension*
3. dites si votre théorie est une extension *propre* ou *définitionnelle*

<sup>1</sup>preuve « mathématique » tirée du cours Algèbre linéaire, EPFL, 2003 et fournie par Philippe Suter