

Étude de cas 3° Formalisation dans $L_{\text{esp_vect_réels}}$

« Théorème de Pythagore »¹

11 et 18 mai 2004

Preuve « mathématique »

Montrons que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

– Considérons le développement suivant

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

– L'égalité $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ est donc respectée à la seule condition que $2\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ orthogonaux.

¹preuve « mathématique » tirée du cours Algèbre linéaire, EPFL, 2003 et fournie par Philippe Suter

Preuve formelle

1	$\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})(x + y \in \mathbb{R})$	ax 1
2	$\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})\forall(z \in \mathbb{R})(x + (y + z) = (x + y) + z)$	ax 2
3	$\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})(x + y = y + x)$	ax 3
4	$\forall(x \in \mathbb{R})(x + 0 = x)$	ax 4
5	$\forall(x \in \mathbb{R})\exists(-x \in \mathbb{R})(x + (-x) = 0)$	ax 5
6	$\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})(x \cdot y \in \mathbb{R})$	ax 6
7	$\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})\forall(z \in \mathbb{R})(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$	ax 7
8	$\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})(x \cdot y = y \cdot x)$	ax 8
9	$\forall(x \in \mathbb{R})(x \cdot 1 = x)$	ax 9
10	$\forall(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\exists(x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(x \cdot x^{-1} = 1)$	ax 10
11	$\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})\forall(z \in \mathbb{R})(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$	ax 11
12	$\forall(n \in \mathbb{N})\forall(\vec{x} \in \mathbb{R}^n)\forall(\vec{y} \in \mathbb{R}^n)(\vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^n)$	ax 12
13	$\forall(n \in \mathbb{N})\forall(\vec{u} \in \mathbb{R}^n)\forall(\vec{v} \in \mathbb{R}^n)(\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u})$	ax 13
14	$\forall(n \in \mathbb{N})\forall(\vec{u} \in \mathbb{R}^n)\forall(\vec{v} \in \mathbb{R}^n)\forall(\vec{w} \in \mathbb{R}^n)(\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w})$	ax 14
15	$\forall(n \in \mathbb{N})\forall(\vec{u} \in \mathbb{R}^n)\forall(\vec{v} \in \mathbb{R}^n)(\vec{u}, \vec{v} \text{ sont orth.} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$	ax déf
16	$\forall(n \in \mathbb{N})\forall(\vec{u} \in \mathbb{R}^n)(\ \vec{u}\ ^2 = \vec{u} \cdot \vec{u})$	ax déf
17	$\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})\forall(z \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(x = y \Leftrightarrow z \cdot x = z \cdot y)$	lem 1
18	$\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})\forall(z \in \mathbb{R})(x = y \Leftrightarrow z + x = z + y)$	lem 2
19	$\forall(x \in \mathbb{R})(x \cdot 0 = 0)$	lem 3
20	$\forall(x \in \mathbb{R})(2 \cdot x = x + x)$	lem 4
21	$n \in \mathbb{N} \wedge \vec{u} \in \mathbb{R}^n \wedge \vec{v} \in \mathbb{R}^n$	hyp
22	$\vec{u}, \vec{v} \text{ sont orth.} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	21, 15
	$\Leftrightarrow 2 \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = 2 \cdot 0$	17
	$\Leftrightarrow 2 \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0$	19
	$\Leftrightarrow (\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2) + 2 \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2) + 0$	18
	$\Leftrightarrow (\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2) + 2 \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2$	4
	$\Leftrightarrow (\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2) + (\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}) = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2$	20
	$\Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}) = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2$	21, 16
	$\Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u}) = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2$	21, 13
	$\Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}) = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2$	2, 3
	$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2$	21, 14
	$\Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2$	21, 14
	$\Leftrightarrow \ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2$	21, 16
23	$(n \in \mathbb{N} \wedge \vec{u} \in \mathbb{R}^n \wedge \vec{v} \in \mathbb{R}^n) \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v} \text{ sont orth.} \Leftrightarrow \ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2)$	21, 22
24	$\forall(n \in \mathbb{N})\forall(\vec{u} \in \mathbb{R}^n)\forall(\vec{v} \in \mathbb{R}^n)(\vec{u}, \vec{v} \text{ sont orth.} \Leftrightarrow \ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2)$	23

Commentaires

- pour fixer les idées, la preuve porte sur des vecteurs *réels*
- \mathbb{R}^n désigne l'espace vectoriel de nombres réels et de dimension n
- $-x$ et x^{-1} sont considérés comme des *symboles*² (variables individuelles) et non pas comme des termes
- $\| \cdot \|^2$ représente un abus de notation pour un (seul) symbole fonctionnel
- l'axiome 1 dit que les nombres réels sont *clos sous l'opération d'addition*
- l'axiome 2 dit que l'addition de nombres réels est *associative*
- l'axiome 3 dit que l'addition de nombres réels est *commutative*
- l'axiome 4 dit que 0 désigne un *élément neutre à gauche* pour l'opération d'addition
- l'axiome 5 dit que pour tout nombre réel il existe un nombre *inverse* pour l'opération d'addition
- les axiomes 1–5 disent que l'ensemble des nombres réels forme un *groupe commutatif* pour l'opération d'addition
- l'axiome 6 dit que les nombres réels sont *clos sous l'opération de multiplication*
- l'axiome 7 dit que la multiplication de nombres réels est *associative*
- l'axiome 8 dit que la multiplication de nombres réels est *commutative*
- l'axiome 9 dit que 1 désigne un *élément neutre à gauche* pour l'opération de multiplication
- l'axiome 10 dit que pour tout nombre réel différent de zéro il existe un nombre *inverse* pour l'opération de multiplication
- les axiomes 6–10 disent que l'ensemble des nombres réels sans le nombre zéro forme un *groupe commutatif* pour l'opération de multiplication
- l'axiome 11 dit que la multiplication de nombres réels est *distributive* par rapport à l'addition de nombres réels
- les axiomes 1–4, 6–10 et 11 disent que l'ensemble des nombres réels forme un *corps* pour l'opération d'addition et de multiplication
- l'axiome 12 dit que l'ensemble des vecteurs réels est *clos sous l'opération d'addition*
- l'axiome 13 dit que le produit scalaire est *commutatif*
- l'axiome 14 dit que le produit scalaire est *distributif* par rapport à l'addition vectorielle
- le lemme 2 se montre de façon analogue au lemme 1
- le lemme 3 dit que la constante individuelle 0 désigne un *annihlateur à gauche* pour l'opération de multiplication
- le lemme 4 se montre par *induction*³

²au même titre qu'une variable primée x' ³sujet pas abordé dans ce cours

Lemme (1)

16.1	$x \in \mathbb{R}$	hyp
16.2	$y \in \mathbb{R}$	hyp
16.3	$z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	hyp
16.4	$x = y$	hyp
16.5	$z \cdot x = z \cdot x$	théor
16.6	$z \cdot x = z \cdot y$	16.4, 16.5
16.7	$z \cdot x = z \cdot y$	hyp
16.8	$\exists(z^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(z \cdot z^{-1} = 1)$	16.3, 10
16.9	$z^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge z \cdot z^{-1} = 1$	hyp
16.10	$x = x \cdot 1$	9
	$= x \cdot (z \cdot z^{-1})$	16.9
	$= (x \cdot z) \cdot z^{-1}$	7
	$= (z \cdot x) \cdot z^{-1}$	8
	$= (z \cdot y) \cdot z^{-1}$	16.7
	$= (y \cdot z) \cdot z^{-1}$	8
	$= y \cdot (z \cdot z^{-1})$	7
	$= y \cdot 1$	16.9
	$= y$	9
16.11	$x = y$	
16.12	$x = y \Leftrightarrow z \cdot x = z \cdot y$	
16.13	$z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow x = y \Leftrightarrow z \cdot x = z \cdot y$	
16.14	$\forall(z \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(x = y \Leftrightarrow z \cdot x = z \cdot y)$	
16.15	$y \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall(z \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(x = y \Leftrightarrow z \cdot x = z \cdot y)$	
16.16	$\forall(y \in \mathbb{R})\forall(z \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(x = y \Leftrightarrow z \cdot x = z \cdot y)$	
16.17	$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall(y \in \mathbb{R})\forall(z \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(x = y \Leftrightarrow z \cdot x = z \cdot y)$	
17	$\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})\forall(z \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(x = y \Leftrightarrow z \cdot x = z \cdot y)$	

Lemme (3)

18.1	$x \in \mathbb{R}$	hyp
18.2	$0 + 0 = 0$	4
18.3	$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0)$ $= x \cdot 0 + x \cdot 0$	18.2 11
18.4	$x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0$	4
18.5	$x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0$	18.3, 18.4
18.6	$0 = x \cdot 0$	18.5, lem 2
18.7	$x \cdot 0 = 0$	18.6
19	$\forall(x \in \mathbb{R})(x \cdot 0 = 0)$	