Étude de cas 2°

Théorie des ensembles générale, fonctions, collections

Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction dérivable[1]

27 avril 2004 : théorie des ensembles générale, fonctions
4 mai 2004 : fonctions, collections

Preuve « mathématique »

Montrons que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ strictement monotone, f dérivable en $x_0 \in\,]a,b[$, $f^{'}(x_0) \neq 0$ admet une fonction réciproque f^{-1}, dérivable en $y_0 = f(x_0)$, $(f^{-1})^{'}(y_0) = \frac{1}{f^{'}(x_0)}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

– On a $f^{-1} \circ f =$identité

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in\,]a,b[$$

– en dérivant par rapport à x en x_0 :

$$(f^{-1})^{'}(f(x_0)) \cdot f^{'}(x_0) = 1$$

$$\Leftrightarrow (f^{-1})^{'}(y_0) \cdot f^{'}(x_0) = 1$$

$$\Leftrightarrow (f^{-1})^{'}(y_0) = \frac{1}{f^{'}(x_0)}$$

Avertissement

La présente étude de cas n'a pas la prétention de remplacer les parties correspondantes d'un cours d'analyse. Notamment, nous ne pouvons entrer ici dans le détail de la définition de la dérivabilité d'une fonction $f : S \to \mathbb{R}$ ($S \subseteq \mathbb{R}$) en un point x. Cette définition contient généralement des conditions particulières sur la forme de S (par exemple que S est un intervalle non réduit à un seul point) ou sur la position de x par rapport à S (par exemple que x est un point intérieur à S). Pour ne pas avoir à entrer dans ces « détails », nous admettons que la proposition « f est dérivable en x » implique toujours que ces conditions sont satisfaites. Cette convention s'applique notamment à notre énoncé du théorème de dérivation d'une fonction composée.

[1]preuve « mathématique » tirée du cours Analyse I, EPFL, 2003 et fournie par Philippe Suter

Preuve formelle

1	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})\forall(c \in \mathbb{R})((a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c)$	ax
2	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(a < b \vee a = b \vee b < a)$	ax
3	$\forall(a \in \mathbb{R})(a \not< a)$	ax
4	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(\,]a,b[\, = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \wedge x < b \,\})$	ax déf
5	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})\forall(f : [a,b] \to \mathbb{R})\forall(S \subseteq [a,b])(f \texttt{ est s.c. sur } S \Leftrightarrow$ $\forall(x \in S)\forall(y \in S)(x < y \Rightarrow f @ x < f @ y))$	ax déf
6	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})\forall(f : [a,b] \to \mathbb{R})\forall(S \subseteq [a,b])(f \texttt{ est s.d. sur } S \Leftrightarrow$ $\forall(x \in S)\forall(y \in S)(x < y \Rightarrow f @ y < f @ x))$	ax déf
7	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})\forall(f : [a,b] \to \mathbb{R})\forall(S \subseteq [a,b])(f \texttt{ est s.m. sur } S \Leftrightarrow$ $(f \texttt{ est s.c. sur } S \ \vee\ f \texttt{ est s.d. sur } S))$	ax déf
8	$\forall(S \subseteq \mathbb{R})\forall(S' \subseteq \mathbb{R})\forall(f : S \to S')\forall(g : S' \to \mathbb{R})\forall(x \in S)$ $(f \texttt{ est dér. en } x \ \wedge\ g \texttt{ est dér. en } f @ x) \ \Rightarrow$ $(g \circ f \texttt{ est dér. en } x \ \wedge\ (g \circ f)' @ x = (g' @ (f @ x)) \cdot (f' @ x))$	théor
9	$\forall f(f \texttt{ est une fonct. inject.} \ \Rightarrow\ f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom} f})$	lem 1
10	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(a \neq b \Leftrightarrow a < b \vee b < a)$	lem 2
11	$f : [a,b] \to \mathbb{R} \ \wedge\ f \texttt{ est s.m. sur } [a,b] \ \wedge\ x_0 \in\,]a,b[\ \wedge$ $f \texttt{ est dér. en } x_0 \ \wedge\ f^{-1} \texttt{ est dér. en } f @ x_0 \ \wedge\ f' @ x_0 \neq 0$	hyp
12	$y_0 = f @ x_0$	hyp
13	$x \in \mathrm{Dom} f \wedge y \in \mathrm{Dom} f \wedge x \neq y$	hyp
14	$x < y \vee y < x$	13, 10
n	$f @ x \neq f @ y$	
n+1	$(x \in \mathrm{Dom} f \wedge y \in \mathrm{Dom} f \wedge x \neq y) \Rightarrow f @ x \neq f @ y$	13, n
n+2	$\forall x \forall y((x \in \mathrm{Dom} f \wedge y \in \mathrm{Dom} f \wedge x \neq y) \Rightarrow f @ x \neq f @ y))$	n+1
n+3	$f \texttt{ est une fonct. inject.}$	n+2
n+4	$f^{-1} \texttt{ est une fonct.}$	n+3
n+5	$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{[a,b]}$	n+3, 9
n+6	$\forall(x \in [a,b])(f^{-1} @ (f @ x) = x)$	n+5
n+7	$f^{-1} @ (f @ x_0) = x_0$	n+6
n+8	$f^{-1} @ (f @ x_0) = x_0 \Rightarrow ((f^{-1})' @ (f @ x_0)) \cdot (f' @ x_0) = 1$	n+7, 11, 8
	$\Leftrightarrow ((f^{-1})' @ y_0) \cdot (f' @ x_0) = 1$	12
	$\Leftrightarrow (f^{-1})' @ y_0 = \frac{1}{f' @ x_0}$	11
n+9	$(f^{-1})' @ y_0 = \frac{1}{f' @ x_0}$	n+7, n+8
n+10	$f^{-1} \texttt{ est une fonct.} \ \wedge\ (f^{-1})' @ y_0 = \frac{1}{f' @ x_0}$	n+4, n+9

Commentaires

– le symbole ____________________ __________ ______________ $<$
désigne un ordre total strict

– `est s.c. sur` est un symbole ____________________ __________ ______________
qui abrège « est strictement croissant sur »

– `est s.d. sur` est un symbole ____________________ __________ ______________
qui abrège « est strictement décroissant sur »

– `est s.m. sur` est un symbole ____________________ __________ ______________
qui abrège « est strictement monotone sur »

– `est dér. en` est un symbole ____________________ __________ ______________
qui abrège « est dérivable en »

– le symbole ____________________ __________ ______________ $'$
désigne l'opération de différentiation

Lemme (1)

8.1	$\forall x \forall y((x,y) \in f^{-1} \circ f \Leftrightarrow x \in \mathrm{Dom} f \wedge y \in \mathrm{Dom} f \wedge f @ x = f @ y)$	lem 1.1
8.2	$\quad f$ `est une fonct. inject.`	hyp
8.3	$\quad\quad (x,y) \in f^{-1} \circ f$	hyp
8.4	$\quad\quad (x,y) \in f^{-1} \circ f \Leftrightarrow x \in \mathrm{Dom} f \wedge y \in \mathrm{Dom} f \wedge f @ x = f @ y$	8.1
8.5	$\quad\quad x \in \mathrm{Dom} f \wedge y \in \mathrm{Dom} f \wedge f @ x = f @ y$	8.3, 8.4
8.6	$\quad\quad (x \in \mathrm{Dom} f \wedge y \in \mathrm{Dom} f \wedge f @ x = f @ y) \Rightarrow x = y$	8.2
8.7	$\quad\quad x = y$	8.5, 8.6
8.8	$\quad\quad x \in \mathrm{Dom} f \wedge x = y$	8.5, 8.7
8.9	$\quad\quad (x,y) \in \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom} f}$	8.8
8.10	$\quad\quad (x,y) \in \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom} f}$	hyp
8.11	$\quad\quad x \in \mathrm{Dom} f \wedge x = y$	8.10
8.12	$\quad\quad x \in \mathrm{Dom} f \wedge x \in \mathrm{Dom} f \wedge f @ x = f @ x$	8.11
8.13	$\quad\quad x \in \mathrm{Dom} f \wedge y \in \mathrm{Dom} f \wedge f @ x = f @ y$	8.11, 8.12
8.14	$\quad\quad (x,y) \in f^{-1} \circ f \Leftrightarrow x \in \mathrm{Dom} f \wedge y \in \mathrm{Dom} f \wedge f @ x = f @ y$	8.1
8.15	$\quad\quad (x,y) \in f^{-1} \circ f$	8.13, 8.14
8.16	$\quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom} f}$	8.3, 8.10
8.17	f `est une fonct. inject.` $\Rightarrow f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom} f}$	8.2, 8.16
9	$\forall f(f$ `est une fonct. inject.` $\Rightarrow f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom} f})$	8.17

Lemme (2)

9.1	$a \in \mathbb{R}$	hyp
9.2	$\quad b \in \mathbb{R}$	hyp
9.3	$\quad\quad a \neq b$	hyp
9.4	$\quad\quad \ldots$	
9.5	$\quad\quad a < b \vee b < a$	
9.6	$\quad\quad a < b \vee b < a$	hyp
9.7	$\quad\quad\quad a < b$	hyp
9.8	$\quad\quad\quad\quad \ldots$	hyp
9.9	$\quad\quad\quad\quad \ldots$	
9.10	$\quad\quad\quad\quad \ldots$	
9.11	$\quad\quad\quad\quad \ldots$	
9.12	$\quad\quad\quad a \neq b$	
9.13	$\quad\quad\quad b < a$	hyp
9.14	$\quad\quad\quad\quad \ldots$	hyp
9.15	$\quad\quad\quad\quad \ldots$	
9.16	$\quad\quad\quad\quad \ldots$	
9.17	$\quad\quad\quad\quad \ldots$	
9.18	$\quad\quad\quad a \neq b$	
9.19	$\quad\quad a \neq b$	
9.20	$\quad a \neq b \Leftrightarrow a < b \vee b < a$	
9.21	$b \in \mathbb{R} \Rightarrow (a \neq b \Leftrightarrow a < b \vee b < a)$	
9.22	$\forall (b \in \mathbb{R})(a \neq b \Leftrightarrow a < b \vee b < a)$	
9.23	$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall (b \in \mathbb{R})(a \neq b \Leftrightarrow a < b \vee b < a)$	
10	$\forall (a \in \mathbb{R}) \forall (b \in \mathbb{R})(a \neq b \Leftrightarrow a < b \vee b < a)$	

Lemme (1.1)

8.0.1	$(x, y) \in f^{-1} \circ f$
	$\Leftrightarrow \exists z((x, z) \in f \wedge (z, y) \in f^{-1})$
	$\Leftrightarrow \exists z(x \in \mathrm{Dom} f \wedge z = f @ x \wedge z \in \mathrm{Dom} f^{-1} \wedge y = f^{-1} @ z)$
	$\Leftrightarrow x \in \mathrm{Dom} f \wedge f @ x \in \mathrm{Dom} f^{-1} \wedge y = f^{-1} @ (f @ x)$
	$\Leftrightarrow x \in \mathrm{Dom} f \wedge (f @ x, y) \in f^{-1}$
	$\Leftrightarrow x \in \mathrm{Dom} f \wedge (y, f @ x) \in f$
	$\Leftrightarrow x \in \mathrm{Dom} f \wedge y \in \mathrm{Dom} f \wedge f @ x = f @ y$
8.1	$\forall x \forall y((x, y) \in f^{-1} \circ f \Leftrightarrow x \in \mathrm{Dom} f \wedge y \in \mathrm{Dom} f \wedge f @ x = f @ y)$