

## Étude de cas 1°

« Disjonction des cas contraires » et  
« Raisonnement par l'absurde »*Inégalité triangulaire de la valeur absolue*<sup>1</sup>

- 9 mars 2004 : symboles, termes et propositions,  
variables libres et liées, substitutions
- 16 mars 2004 : axiomes, prémisses, hypothèses,  
jugements, déductions, théorèmes,  
substitutivité de l'équivalence
- 23 mars 2004 : particularisations, généralisations,  
« Disjonction des cas contraires »
- 30 mars 2004 : substitutivité de l'égalité,  
« Raisonnement par l'absurde »

## Preuve « mathématique »

Montrons que  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

– Si

$$x + y \geq 0$$

sachant que

$$x \leq |x| \Leftrightarrow x + y \leq |x| + y$$

et

$$y \leq |y| \Leftrightarrow y + |x| \leq |y| + |x|$$

alors

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

– Si

$$x + y \leq 0$$

sachant que

$$-x \leq |x| \Leftrightarrow -x + (-y) \leq |x| + (-y)$$

et

$$-y \leq |y|$$

alors

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq |x| + (-y) \leq |x| + |y|$$

« Les mathématiciens ne se servent que très partiellement d'un langage formalisé. Ils combinent celui-ci avec des expressions et des phrases entières du langage naturel, et surtout, ils omettent un nombre considérable de maillons dans les chaînes d'assertions qui constituent les démonstrations. »

Chapitre 1 : Jacques Zahnd. *Logique élémentaire*. PPUR, 1998, (2003).

"A mathematical proof is *well-presented* :iff its logical structure is apparent to the proof reader."

Simon Kramer, 2004

<sup>1</sup>preuve « mathématique » tirée du cours Analyse I, EPFL, 2003 et fournie par Philippe Suter

## Preuve formelle

## « Disjonction des cas contraires »

1	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})\forall(c \in \mathbb{R})((a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c)$	axiome
2	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})((a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b)$	axiome
3	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(a \leq b \vee b \leq a)$	axiome
4	$\forall(a \in \mathbb{R})(a \leq a)$	axiome
5	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(a + b = b + a)$	axiome
6	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(-(a + b) = -a + (-b))$	axiome
7	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(a \geq b \Leftrightarrow b \leq a)$	axiome définitionnel
8	$\forall(a \in \mathbb{R})(0 \leq a \Rightarrow  a  = a)$	axiome définitionnel
9	$\forall(a \in \mathbb{R})(a \leq 0 \Rightarrow  a  = -a)$	axiome définitionnel
10	$\forall(a \in \mathbb{R})(a \leq  a )$	prémisse
11	$\forall(a \in \mathbb{R})(a \leq  a  \Leftrightarrow \forall(b \in \mathbb{R})(a + b \leq  a  + b))$	prémisse
12	$\forall(a \in \mathbb{R})( -a  =  a )$	prémisse
13	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(\neg(a \geq b) \Leftrightarrow (a \leq b \wedge \neg(a = b)))$	lemme (1)
14	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(a = b \Rightarrow a \leq b)$	lemme (2)
15	$x \in \mathbb{R}$	hypothèse
16	$y \in \mathbb{R}$	hypothèse
17	$0 \leq x + y \vee \neg(0 \leq x + y)$	S?
18	$x + y \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x + y$	7, S?
19	$x + y \geq 0 \vee \neg(x + y \geq 0)$	17, 18, S?
20	$\neg(x + y \geq 0) \Leftrightarrow (x + y \leq 0 \wedge \neg(x + y = 0))$	13, S?
21	$x + y \geq 0 \vee (x + y \leq 0 \wedge \neg(x + y = 0))$	19, 20, S?
22	$(x + y \geq 0 \vee x + y \leq 0) \wedge (x + y \geq 0 \vee \neg(x + y = 0))$	21, S?
23	$x + y \geq 0 \vee x + y \leq 0$	22, S?
24	$x + y \geq 0$	hypothèse
:	:	:
46	$ x + y  \leq  x  +  y $	44, 45, S?
47	$x + y \leq 0$	hypothèse
:	:	:
63	$ x + y  \leq  x  +  y $	61, 62, S?
64	$ x + y  \leq  x  +  y $	23, 46, 63, S?
65	$y \in \mathbb{R} \Rightarrow  x + y  \leq  x  +  y $	16, 64, S?
66	$\forall(y \in \mathbb{R})( x + y  \leq  x  +  y )$	65, S?
67	$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall(y \in \mathbb{R})( x + y  \leq  x  +  y )$	15, 66, S?
68	$\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})( x + y  \leq  x  +  y )$	67, S?

25	$x + y \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x + y$	7, S?
26	$0 \leq x + y$	24, 25, S?
27	$0 \leq x + y \Rightarrow  x + y  = x + y$	8, S?
28	$ x + y  = x + y$	26, 27, S?
29	$ x + y  = x + y \Rightarrow  x + y  \leq x + y$	14, S?
30	$ x + y  \leq x + y$	28, 29, S?
31	...	10, S?
32	...	11, S?
33	$x + y \leq  x  +  y $	31, 32, S?
34	...	30, 33, S?
35	...	...
36	$ x + y  \leq  x  +  y $	34, 35, S?
37	...	10, S?
38	...	11, S?
39	$y +  x  \leq  y  +  x $	37, 38, S?
40	$y +  x  =  x  +  y $	5, S?
41	$ x  + y \leq  y  +  x $	39, 40, S?
42	...	...
43	...	...
44	$ x + y  \leq  y  +  x $	42, 43, S?
45	$ y  +  x  =  x  +  y $	5, S?
48	$x + y \leq 0 \Rightarrow  x + y  = -(x + y)$	9, S?
49	$ x + y  = -(x + y)$	47, 48, S?
50	$ x + y  = -(x + y) \Rightarrow  x + y  \leq -(x + y)$	14, S?
51	$ x + y  \leq -(x + y)$	49, 50, S?
52	$-(x + y) = -x + (-y)$	6, S?
53	$ x + y  \leq -x + (-y)$	51, 52, S?
54	$-x + (-y) \leq  -x  + (-y)$	10, 11, S?
55	$ -x  =  x $	12, S?
56	$-x + (-y) \leq  x  + (-y)$	54, 55, S?
57	$ x + y  \leq  x  + (-y)$	53, 56, S?
58	$(-y) +  x  \leq  y  +  x $	10, 11, S?
59	$(-y) +  x  =  x  + (-y)$	5, S?
60	$ x  + (-y) \leq  y  +  x $	58, 59, S?
61	$ x + y  \leq  y  +  x $	57, 60, S?
62	$ y  +  x  =  x  +  y $	5, S?

## Commentaires

– formelle / formalisée :

1. existence de *règles de formation univoques*
2. existence d'un *procédé mécanique* de reconnaissance<sup>2</sup>

– « Disjonction des cas contraires » :

une *stratégie de preuve* (schéma de déduction particulièrement important)

– numérotation, jugements ( $\Gamma \vdash P$ ), justifications, **but**, **stratégie de preuve principale**

– quantificateurs typés :  $\vdash \forall(x \in T)(P) \Leftrightarrow \forall x(x \in T \Rightarrow P)$

– le symbole  $\leq$  binaire désigne un *ordre total* (ou *linéaire*) réflexif :  
une relation transitive, anti-symétrique, totale (ou linéaire), et réflexive

– le symbole  $|\cdot|$  unaire désigne l'opération qui calcule la valeur absolue

– schéma de déduction « a fortiori » sous-entendu

– longueur d'une preuve formelle

<sup>2</sup>voir cours Informatique théorique III/IV et Compilation

## Lemme (1)

### « Raisonement par l'absurde »

13	$a \in \mathbb{R}$	hyp
14	$b \in \mathbb{R}$	hyp
15	$\neg(a \geq b)$	hyp
16	$a \leq b \vee b \leq a$	3, S?
17	$b \geq a \Leftrightarrow a \leq b$	7, S?
18	$b \geq a \vee b \leq a$	16, 17, S?
19	$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$	7, S?
20	$b \geq a \vee a \geq b$	18, 19, S?
21	$b \geq a$	15, 20, S?
22	$a \leq b$	17, 21, S?
23	$a = b$	hyp
24	$\neg(a \geq a)$	15, 23, S?
25	$a \geq a \Leftrightarrow a \leq a$	7, S?
26	$\neg(a \leq a)$	24, 25, S?
27	$a \leq a$	4, S?
28	$\perp$	26, 27, S?
29	$\neg(a = b)$	23, 28, S?
30	$a \leq b \wedge \neg(a = b)$	22, 29, S?
31	$a \leq b \wedge \neg(a = b)$	hyp
32	$b \leq a$	hyp
33	$a \leq b$	31, S?
34	$a \leq b \wedge b \leq a$	32, 33, S?
35	$(a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$	2, S?
36	$a = b$	34, 35, S?
37	$\neg(a = b)$	31, S?
38	$\perp$	36, 37, S?
39	$\neg(b \leq a)$	32, 38, S?
40	$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$	7, S?
41	$\neg(a \geq b)$	39, 40, S?
42	$\neg(a \geq b) \Leftrightarrow (a \leq b \wedge \neg(a = b))$	15, 30, 31, 41, S?
43	$b \in \mathbb{R} \Rightarrow (\neg(a \geq b) \Leftrightarrow (a \leq b \wedge \neg(a = b)))$	14, 42, S?
44	$\forall(b \in \mathbb{R})(\neg(a \geq b) \Leftrightarrow (a \leq b \wedge \neg(a = b)))$	43, S?
45	$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall(b \in \mathbb{R})(\neg(a \geq b) \Leftrightarrow (a \leq b \wedge \neg(a = b)))$	13, 44, S?
46	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(\neg(a \geq b) \Leftrightarrow (a \leq b \wedge \neg(a = b)))$	45, S?

**Lemme (2)**

14	$a \in \mathbb{R}$	hyp
15	$b \in \mathbb{R}$	hyp
16	$a = b$	hyp
17	...	...
18	$a \leq b$	...
19	...	...
20	...	...
21	...	...
22	...	...
23	<u><math>\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(a = b \Rightarrow a \leq b)</math></u>	...