Étude de cas 1°

« Disjonction des cas contraires » et « Raisonnement par l'absurde »

Inégalité triangulaire de la valeur absolue[1]

9 mars 2004 :	symboles, termes et propositions, variables libres et liées, substitutions
16 mars 2004 :	axiomes, prémisses, hypothèses, jugements, déductions, théorèmes, substitutivité de l'équivalence
23 mars 2004 :	particularisations, généralisations, « Disjonction des cas contraires »
30 mars 2004 :	substitutivité de l'égalité, « Raisonnement par l'absurde »

Preuve « mathématique »

Montrons que $|x+y| \leq |x| + |y|$.

– Si
$$x + y \geq 0$$
sachant que
$$x \leq |x| \Leftrightarrow x + y \leq |x| + y$$
et
$$y \leq |y| \Leftrightarrow y + |x| \leq |y| + |x|$$
alors
$$|x+y| = x + y \leq |x| + |y|$$
– Si
$$x + y \leq 0$$
sachant que
$$-x \leq |x| \Leftrightarrow -x + (-y) \leq |x| + (-y)$$
et
$$-y \leq |y|$$
alors
$$|x+y| = -(x+y) = -x - y \leq |x| + (-y) \leq |x| + |y|$$

[1] preuve « mathématique » tirée du cours Analyse I, EPFL, 2003 et fournie par Philippe Suter

Simon Kramer Logique élémentaire EPFL

« Les mathématiciens ne se servent que très partiellement d'un langage formalisé. Ils combinent celui-ci avec des expressions et des phrases entières du langage naturel, et surtout, ils omettent un nombre considérable de maillons dans les chaînes d'assertions qui constituent les démonstrations. »
Chapitre 1 : Jacques Zahnd. *Logique élémentaire*. PPUR, 1998, (2003).

"A mathematical proof is *well-presented* :iff its logical structure is apparent to the proof reader."
Simon Kramer, 2004

Preuve formelle

« Disjonction des cas contraires »

1	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})\forall(c \in \mathbb{R})((a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c)$	axiome
2	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})((a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b)$	axiome
3	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(a \leq b \vee b \leq a)$	axiome
4	$\forall(a \in \mathbb{R})(a \leq a)$	axiome
5	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(a + b = b + a)$	axiome
6	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(-(a + b) = -a + (-b))$	axiome
7	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(a \geq b \Leftrightarrow b \leq a)$	axiome définitionnel
8	$\forall(a \in \mathbb{R})(0 \leq a \Rightarrow \lvert a\rvert = a)$	axiome définitionnel
9	$\forall(a \in \mathbb{R})(a \leq 0 \Rightarrow \lvert a\rvert = -a)$	axiome définitionnel
10	$\forall(a \in \mathbb{R})(a \leq \lvert a\rvert)$	prémisse
11	$\forall(a \in \mathbb{R})(a \leq \lvert a\rvert \Leftrightarrow \forall(b \in \mathbb{R})(a + b \leq \lvert a\rvert + b))$	prémisse
12	$\forall(a \in \mathbb{R})(\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert)$	prémisse
13	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(\neg(a \geq b) \Leftrightarrow (a \leq b \wedge \neg(a = b)))$	lemme (1)
14	$\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(a = b \Rightarrow a \leq b)$	lemme (2)
15	$x \in \mathbb{R}$	hypothèse
16	$y \in \mathbb{R}$	hypothèse
17	$0 \leq x + y \vee \neg(0 \leq x + y)$	S?
18	$x + y \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x + y$	7, S?
19	$x + y \geq 0 \vee \neg(x + y \geq 0)$	17, 18, S?
20	$\neg(x + y \geq 0) \Leftrightarrow (x + y \leq 0 \wedge \neg(x + y = 0))$	13, S?
21	$x + y \geq 0 \vee (x + y \leq 0 \wedge \neg(x + y = 0))$	19, 20, S?
22	$(x + y \geq 0 \vee x + y \leq 0) \wedge (x + y \geq 0 \vee \neg(x + y = 0))$	21, S?
23	$x + y \geq 0 \vee x + y \leq 0$	22, S?
24	$x + y \geq 0$	hypothèse
⋮	⋮	⋮
46	$\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	44, 45, S?
47	$x + y \leq 0$	hypothèse
⋮	⋮	⋮
63	$\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	61, 62, S?
64	$\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	23, 46, 63, S?
65	$y \in \mathbb{R} \Rightarrow \lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	16, 64, S?
66	$\forall(y \in \mathbb{R})(\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert)$	65, S?
67	$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall(y \in \mathbb{R})(\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert)$	15, 66, S?
68	$\boxed{\forall(x \in \mathbb{R})\forall(y \in \mathbb{R})(\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert)}$	67, S?

25	$x + y \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x + y$	7, S?
26	$0 \leq x + y$	24, 25, S?
27	$0 \leq x + y \Rightarrow \lvert x + y\rvert = x + y$	8, S?
28	$\lvert x + y\rvert = x + y$	26, 27, S?
29	$\lvert x + y\rvert = x + y \Rightarrow \lvert x + y\rvert \leq x + y$	14, S?
30	$\lvert x + y\rvert \leq x + y$	28, 29, S?
31	...	10, S?
32	...	11, S?
33	$x + y \leq \lvert x\rvert + y$	31, 32, S?
34	...	30, 33, S?
35	...	...
36	$\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + y$	34, 35, S?
37	...	10, S?
38	...	11, S?
39	$y + \lvert x\rvert \leq \lvert y\rvert + \lvert x\rvert$	37, 38, S?
40	$y + \lvert x\rvert = \lvert x\rvert + y$	5, S?
41	$\lvert x\rvert + y \leq \lvert y\rvert + \lvert x\rvert$	39, 40, S?
42	...	...
43	...	...
44	$\lvert x + y\rvert \leq \lvert y\rvert + \lvert x\rvert$	42, 43, S?
45	$\lvert y\rvert + \lvert x\rvert = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	5, S?

48	$x + y \leq 0 \Rightarrow \lvert x + y\rvert = -(x + y)$	9, S?
49	$\lvert x + y\rvert = -(x + y)$	47, 48, S?
50	$\lvert x + y\rvert = -(x + y) \Rightarrow \lvert x + y\rvert \leq -(x + y)$	14, S?
51	$\lvert x + y\rvert \leq -(x + y)$	49, 50, S?
52	$-(x + y) = -x + (-y)$	6, S?
53	$\lvert x + y\rvert \leq -x + (-y)$	51, 52, S?
54	$-x + (-y) \leq \lvert -x\rvert + (-y)$	10, 11, S?
55	$\lvert -x\rvert = \lvert x\rvert$	12, S?
56	$-x + (-y) \leq \lvert x\rvert + (-y)$	54, 55, S?
57	$\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + (-y)$	53, 56, S?
58	$(-y) + \lvert x\rvert \leq \lvert y\rvert + \lvert x\rvert$	10, 11, S?
59	$(-y) + \lvert x\rvert = \lvert x\rvert + (-y)$	5, S?
60	$\lvert x\rvert + (-y) \leq \lvert y\rvert + \lvert x\rvert$	58, 59, S?
61	$\lvert x + y\rvert \leq \lvert y\rvert + \lvert x\rvert$	57, 60, S?
62	$\lvert y\rvert + \lvert x\rvert = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	5, S?

Commentaires

– formelle / formalisée :

1. existence de *règles de formation univoques*
2. existence d'un *procédé mécanique* de reconnaissance[2]

– « Disjonction des cas contraires » :
une *stratégie de preuve* (schéma de déduction particulièrement important)

– numérotation, jugements ($\Gamma \vdash \mathsf{P}$), justifications, $\boxed{\text{but}}$, stratégie de preuve principale

– quantificateurs typés : $\overline{\vdash \forall(x \in \mathsf{T})(\mathsf{P}) \Leftrightarrow \forall x(x \in \mathsf{T} \Rightarrow \mathsf{P})}$

– le symbole ________ binaire $\leq$ désigne un *ordre total* (ou *linéaire*) réflexif :
une relation transitive, anti-symétrique, totale (ou linéaire), et réflexive

– le symbole ________ unaire $|\cdot|$ désigne l'opération qui calcule la valeur absolue

– schéma de déduction « a fortiori » sous-entendu

– longueur d'une preuve formelle

[2]voir cours Informatique théorique III/IV et Compilation

Lemme (1)
« Raisonnement par l'absurde »

13	$a \in \mathbb{R}$	hyp
14	$b \in \mathbb{R}$	hyp
15	$\neg(a \geq b)$	hyp
16	$a \leq b \vee b \leq a$	3, S?
17	$b \geq a \Leftrightarrow a \leq b$	7, S?
18	$b \geq a \vee b \leq a$	16, 17, S?
19	$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$	7, S?
20	$b \geq a \vee a \geq b$	18, 19, S?
21	$b \geq a$	15, 20, S?
22	$a \leq b$	17, 21, S?
23	$a = b$	hyp
24	$\neg(a \geq a)$	15, 23, S?
25	$a \geq a \Leftrightarrow a \leq a$	7, S?
26	$\neg(a \leq a)$	24, 25, S?
27	$a \leq a$	4, S?
28	$\bot$	26, 27, S?
29	$\neg(a = b)$	23, 28, S?
30	$a \leq b \wedge \neg(a = b)$	22, 29, S?
31	$a \leq b \wedge \neg(a = b)$	hyp
32	$b \leq a$	hyp
33	$a \leq b$	31, S?
34	$a \leq b \wedge b \leq a$	32, 33, S?
35	$(a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$	2, S?
36	$a = b$	34, 35, S?
37	$\neg(a = b)$	31, S?
38	$\bot$	36, 37, S?
39	$\neg(b \leq a)$	32, 38, S?
40	$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$	7, S?
41	$\neg(a \geq b)$	39, 40, S?
42	$\neg(a \geq b) \Leftrightarrow (a \leq b \wedge \neg(a = b))$	15, 30, 31, 41, S?
43	$b \in \mathbb{R} \Rightarrow (\neg(a \geq b) \Leftrightarrow (a \leq b \wedge \neg(a = b)))$	14, 42, S?
44	$\forall(b \in \mathbb{R})(\neg(a \geq b) \Leftrightarrow (a \leq b \wedge \neg(a = b)))$	43, S?
45	$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall(b \in \mathbb{R})(\neg(a \geq b) \Leftrightarrow (a \leq b \wedge \neg(a = b)))$	13, 44, S?
46	$\underline{\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(\neg(a \geq b) \Leftrightarrow (a \leq b \wedge \neg(a = b)))}$	45, S?

Lemme (2)

14	$a \in \mathbb{R}$	hyp
15	$\quad b \in \mathbb{R}$	hyp
16	$\quad\quad a = b$	hyp
17	$\quad\quad \ldots$	...
18	$\quad\quad a \leq b$	...
19	$\quad \ldots$	...
20	$\ldots$	...
21	$\ldots$	...
22	$\ldots$	...
23	$\underline{\forall(a \in \mathbb{R})\forall(b \in \mathbb{R})(a = b \Rightarrow a \leq b)}$	...